

---

**INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS**  
**Série 8**

---

**Exercice 1.** [Variables aléatoires et leurs lois] Montrer que pour toute loi de probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_B)$ , il est possible de définir une variable aléatoire dont la loi est décrite par  $\mathbb{P}$ .

**Exercice 2.** [Variables aléatoires de Poisson] Soient  $X_1 \sim Poi(\lambda_1)$  et  $X_2 \sim Poi(\lambda_2)$  deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité.

- Démontrer que  $X_1 + X_2$  est également une variable aléatoire de Poisson avec paramètre  $\lambda_1 + \lambda_2$ .
- Soient maintenant  $Y_1, Y_2, \dots$  des variables aléatoires indépendantes de loi  $Ber(p)$  définies sur le même espace de probabilité. Montrer que  $X := \sum_{i=1}^{X_1} Y_i$  est une variable aléatoire et qu'elle suit également la loi  $Poi(p\lambda)$ . Montrer que de plus  $X_1 - X$  suit la loi  $Poi((1-p)\lambda)$  et est indépendante de  $X$ .

**Exercice 3.** Existe-t-il une variable aléatoire  $X$  prenant des valeurs dans  $\mathbb{N}$  et telle que si  $X_1, X_2$  sont des copies indépendantes ayant la loi de  $X$ , alors  $X_1 + X_2$  ait la loi de  $X$  ?

**Exercice 4.** [Entropie I] Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes avec supports  $S, T$ . Alors le couple  $(X, Y)$  prend des valeurs dans  $S \times T$ . Montrer que  $H((X, Y)) = H(X) + H(Y)$  où  $H$  désigne l'entropie de Shannon (cf. Définition 3.13 dans les notes de cours).

**Exercice 5.** [Entropie II] Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes de supports respectifs  $S$  et  $T$ . Montrer que  $H(X + Y) \geq H(X)$ . Quand l'égalité est-elle atteinte ?

**Exercice 6.** [Loi géométrique comme loi d'entropie maximale] Considérons une variable aléatoire  $X$  prenant des valeurs dans  $\mathbb{N}$  et telle que  $\sum_{i \geq 1} i\mathbb{P}(X = i) = C$  avec  $C > 0$  fixé.

Montrer que  $H(X) \leq H(G)$  où  $G$  suit la loi géométrique  $Geo(p_C)$ , où  $p_C$  est tel que la contrainte ci-dessus soit respectée. Montrer que l'égalité est satisfaite si et seulement si  $X$  suit la même loi géométrique.

## 0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

**Exercice 7.** Le modèle d'Ising est un modèle bien connu en physique statistique. Pour tout graphe  $G = (V, E)$ , il peut être défini comme une mesure de probabilité sur les configurations de spins  $\sigma : V \rightarrow \{-1, +1\}$  où les probabilités sont données par

$$\mathbb{P}(\{\sigma\}) := \frac{1}{Z} \exp \left( \sum_{\{i,j\} \in E} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j \right),$$

où  $J_{i,j}$  sont des paramètres réels et la somme est prise sur les arêtes non orientées.

Pour un modèle d'Ising donné, nous notons pour tous  $i, j \in V$

$$c(i, j) = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma} \sigma(i) \sigma(j) \mathbb{P}(\{\sigma\}).$$

Démontrez que le modèle d'Ising est la distribution d'entropie maximale parmi toutes les mesures de probabilité  $\mathbb{Q}$  sur les configurations  $\tilde{\sigma} : V \rightarrow \{-1, +1\}$ , sous la contrainte que

$$\frac{1}{Z} \sum_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}(i) \tilde{\sigma}(j) \mathbb{Q}(\{\sigma\}) = c(i, j).$$